Ministerul Educaţiei, Cercetării, Tineretului şi Sportului
Societatea de Ştiinţe Matematice din România

**Olimpiada Naţională de Matematică**

**Etapa Judeţeană şi a Municipiului Bucureşti, 10 Martie 2012**

**CLASA a X-a**

**Problema 1.** Fie $f : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ o funcţie cu proprietatea

$$|f(x) - f(y)| \leq |\sin x - \sin y|,$$

pentru orice $x, y \in [0, \infty)$. Demonstraţi că $f$ este mărginită şi periodică, iar funcţia $g : [0, \infty) \to \mathbb{R}$ definită prin $g(x) = x + f(x)$ este monotonă.

**Problema 2.** a) Determinaţi toate soluţiile reale ale ecuaţiei $2^x = x+1$;
b) Se consideră funcţia $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ astfel încât

$$f(f(x)) = 2^x - 1,$$

pentru orice $x \in \mathbb{R}$. Demonstraţi că $f(0) + f(1) = 1$.

*Gazeta Matematică*

**Problema 3.** Fie şirul de numere naturale $(a_n)_{n \geq 1}$ astel încât $a_n \leq n$, pentru orice $n \geq 1$ şi

$$\sum_{k=1}^{n-1} \cos \frac{\pi a_k}{n} = 0,$$

pentru orice $n \geq 2$.
a) Aflaţi $a_2$.
b) Determinaţi termenul general al şirului $(a_n)_{n \geq 1}$ în funcţie de $n \in \mathbb{N}^*$

**Problema 4.** Fie $a$ şi $b$ două numere raţionale astfel încât numărul complex $z = a + ib$ să aibă modulul 1.
Arătaţi că modulul numărului complex $z_n = 1 + z + z^2 + \cdots + z^{n-1}$ este un număr raţional pentru orice $n$ impar.

*Timp de lucru 4 ore.*
*Fiecare problemă este notată cu 7 puncte.*